数理解析研究所講究録
36巻 1968年 29-36

三角多項式による函数の近似について

東北大理　洲之内源一郎

§1 はしがき

$f(x)$ を週期 2π の連続函数としノルムは C－ノルムとする. 凡ゆる n 次の三角多項式 $T_n(x)$ を考え, $\|f-T_n\|$ の下限を $f(x)$ の n 次の最良近似といい $E_n(f)$ とかく. よく知られているように $E_n(f)$ に到達する n 次の三角多項式 $B_n(x) \equiv B_n(x,f)$ が存在し, しかも唯一つである. すなわち

$$\|f-B_n\| = E_n(f).$$

しかし $B_n(x,f)$ は f の上の線形作用素とならないので, f のフーリエ級数の部分和またはその線形演算による近似を調べることが有用である.

例えば $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ ならば $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ である. f のフーリエ級数の n 次部分和 $s_n(x)$ による近似は L^2－ノルムの時は最良であるが, C－ノルムでは

$$\|f-s_n\| = O(n^{-\alpha}\log n)$$

となり, この $\log n$ の項を取去ることができない事は古く H. Lebesgue によって示されている. しかし $s_n(x)$ の算術平均

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x)$$

いわゆる Fejér 和 $\sigma_n(x)$ をとると

$$\|f-\sigma_n\| = O(n^{-\alpha})$$

となることが S. Bernstein によって示されている．しかし Fejér 和 σ_n による近似の最高次数は $O(n^{-1})$ でこれ以上よくならない．もしも

$$\|f-\sigma_n\| = o(n^{-1})$$

ならば $f(x)$ は定数函数に限るのである．これは単位円に関する Dirichlet 問題の解いわゆる Poisson 積分 $f(r,x)$ についても同様で，Poisson 積分から境界函数 $f(x)$ への半径方向での近ずき方が

$$\|f(r,x)-f(x)\| = o(1-r), \qquad (r\uparrow 1)$$

となれば $f(x)$ は定数函数に限るのである．

この現象に着目して J. Favard [1] は 1947 年 Nancy における調和解析のコロキュームで次のような問題を提出した．"函数の与えられた線形近似法に関して近似の最高次数と，それに到達する函数族を決定せよ" というのである．その後 M. Zamansky [2]，G. Alexits [3]，P.L. Butzer [4] などによって特殊な場合について，特殊な方法でこの問題が解かれたが，これの一般的な解法および最良近似との関係などについて述べたい．洲之内－渡利 [5]，洲之内 [6] 参照．

§2．近似法の飽和について．

(定義) $P_n(x) \equiv P_n(x,f)$ を $f(x)$ のある線形近似法でパラメーター n を持つものとする．いま正の減少函数 $\varphi(n)$ とある trivial でない函数族 $\mathfrak{K}$ とが存在して

(1) $\quad \|f-P_n\| = o\{\varphi(n)\}$

となるのは f がこの近似法の不変要素の時に限り，

(2) $\qquad \| f - P_n \| = O\{\varphi(n)\}$

となるのは $f \in \mathfrak{F}$ の時に限るならば，この近似法は次数 $\varphi(n)$ と函数族 $\mathfrak{F}$ を以って飽和に達しているという。

ここでは f と他の周期的有界変動偶函数 $G_n(x)$ との接合積による線形作用素 $P_n(x, f) = (f * dG_n)(x)$ による近似に限って考える．これは f のフーリエ級数を

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$$

とし，$G_n(x)$ の Fourier-Stieltjes 級数を

$$S(dG_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(n) \cos kx \qquad (g_0(n)=1)$$

とした時

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(n) A_k(x)$$

を考えることになる．もちろん G_n が有界変動であるから n を固定すれば $P_n(x)$ は連続函数になっている．

(定理 1) $\varphi(n)$ を正の減少函数，$\psi(k) \neq 0$ $(k=1,2,\cdots)$ とし

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1-g_k(n)}{\varphi(n)\psi(k)} = c \neq 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

と仮定する．その時

(4) $\qquad \| f - P_n \| = o\{\varphi(n)\}$

となるのは $f(x)$ が定数の時に限る．

(5) $\qquad \| f - P_n \| = O\{\varphi(n)\}$

ならば形式的な三角級数

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) A_k(x)$$

はある L^∞ に属する函数 $f^\psi(x)$ のフーリエ級数である。

逆に (6) が $f^\psi \in L^\infty$ のフーリエ級数で

$$(7) \qquad \lambda_k(n) = \frac{1-g_k(n)}{\varphi(n)\psi(k)}$$

が n について一様に (L^∞, L^∞) − 持続因子ならば

$$\| f - P_n \| = O\{\varphi(n)\}$$

の近似度をもつ。

（証明） $f(x) - P_n(x)$ のフーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{1 - g_k(n)\}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

であるから，フーリエ係数の計算によって

$$(8) \qquad \{1 - g_k(n)\} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f - P_n) \cos kx\, dx.$$

k を固定し $n \to \infty$ として，(3) と (4) を用いると $a_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$

同様に $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

(5) の仮定では $\| f - P_n \| / \varphi(n)$ が n について一様有界故，C を L^∞ へ imbed し L^∞ の弱*− compact 性を用いる。(8) と (5) と (3) とから

$$\psi(k) a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x) \cos kx\, dx \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\psi(k) b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x) \sin kx\, dx \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

なる $f^\psi \in L^\infty$ が存在する。

逆に (7) が n について (L^∞, L^∞) − 持続因子ならば仮定から求める近似式が成立つことは殆ど明かである。

（注意）定理1から多少の仮定の下で，(3)が成立すれば $\varphi(n)$ が飽和の次数を定め，$\psi(k)$ が飽和の函数族をきめることが分る．しかし A.H. Turetski [7] は $P_n(x)=P_n(x,f)$ が $f\in L^\infty$ に対して

$$\|P_n(x,f)\|_\infty \leqq M\|f\|_\infty$$

を満足するならば (3)の仮定の下で無条件に $\|f-P_n\|=O\{\varphi(n)\}$ の近似が成立するといっているが，その証明は完全ではない．(真偽は不明)

§3. 近似の直接定理

上の一般定理で (6) が L^∞ の函数のフーリエ級数であるという事柄はもとの f の語で表わすことができる．特に $\psi(k)=k^m$ で m が正の偶数ならば f の m 次導函数 $f^{(m)}(x)\in L^\infty$ であり，m が正の奇数ならば f の共軛函数 $\tilde{f}$ の m 次導函数 $\tilde{f}^{(m)}(x)\in L^\infty$ である．

しかし近似度を与える直接定理の条件 $\lambda_k(n)$ が (L^∞, L^∞)-持続因子であることの検証は複雑であるので，この問題を考えたい．いま $g_k(n)$ が特に $g\left(\frac{k}{n}\right)$ の形をした時だけに限ることにする．通常の線形総和法の方法ではこの形の事が多い．この時には (7) は

$$\frac{1-g\left(\frac{k}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{n}\right)}=\lambda\left(\frac{k}{n}\right)$$

の形となるが，この時 $\lambda(u)$ $(0\leqq u<\infty)$ が偶函数で有界変動函数の Fourier-Stieltjes 積分によって表現されれば，Poisson の和の公式を用いて $\lambda\left(\frac{k}{n}\right)\in(L^\infty, L^\infty)$ がいわれる．

$g(u)$ が $L(0,\infty)$ の函数の Fourier 積分として表現されるための十分条件でこの場合役にたつのは次の二つがある．

(1) Beurling の条件

$g(u)$が絶対連続で g, g' が共に $L^2(0,\infty)$ に属する.

(2) B. Nagy の条件

$g(u)$が絶対連続で $g' \in BV$, $\int_0^\infty u|dg'(u)| < \infty$.

もしも $0, a_1, \ldots, a_s$ 以外の点の近傍で BV の時は, この特異点で

$$\int_{\to 0} u|dg'(u)|,\quad \int_0^{a_i-0} + \int_{a_i+0} |u-a_i| \log \frac{1}{|u-a_i|} |dg'(u)|,$$

$$\int^\infty u|dg'(u)| < \infty \quad \text{である.}$$

これらを用いると知られている総和法による近似の大部分, 例えば次表のようなものは飽和の問題を完全に解決することができる.

近似法	$g_k(n)$	飽和次数	飽和族
Cesàro	$\begin{cases} (1-\frac{k}{n}) & (k<n) \\ 0 & (k\geqq n) \end{cases}$	n^{-1}	$\tilde{f}' \in L^\infty$
Poisson	r^k	$1-r$	$\tilde{f}' \in L^\infty$
Gauss	$e^{-k^2 r}$	r	$f''(x) \in L^\infty$
Rogosinski	$\cos \frac{k\pi}{2n+1}$	n^{-2}	$f''(x) \in L^\infty$
Riesz	$\begin{cases} \{1-(\frac{k}{n})^\lambda\}^\rho, & (k<n) \\ 0 & (k\geqq n) \end{cases}$	$n^{-\lambda}$,	$f^{((\lambda))}(x) \in L^\infty$

ここに $f^{((\lambda))}$ とは $\sum n^\lambda A_n(x)$ をフーリエ級数とする函数のことである.

特に

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^\lambda \right\} A_k(x) \equiv R_n(x)$$

とすると，飽和の次数は $O(n^{-\lambda})$ であるから λを大きくすればいくらでもより近似が得られる.

§4. 飽和近似と最良近似.

飽和近似と最良近似との間には次の関係が成立つ.

(定理2) $T_n(f)$ が線形近似法で

(1) $\|T_n(f)\|_\infty \leqq M_1\|f\|_\infty$

(2) $\|f-T_n(f)\|_\infty \leqq M_2\cdot n^{-\lambda}\|f^{((\lambda))}\|_\infty \quad (\lambda>0)$

ならば $0<\alpha<\lambda$ の時最良近似が

$$E_n(f)=O(n^{-\alpha})$$

なる函数 f に対し，T_n にによる近似も同じ次数の近似度をもつ．すなわち

$$\|f-T_n(f)\|=O(n^{-\alpha}).$$

この証明には次の補題がいる.

(補題) $\|f-P_n\|=O(n^{-\alpha})$ ならば $\lambda>\alpha$ ならば

$$\|P_n^{((\lambda))}(x)\|=O(n^{\lambda-\alpha}).$$

証明は Zamansky [2] にのべられている一つの定理と，分数次の Bernstein の不等式を用いる.

(定理の証明) $P_n(x)$ を最良近似に到達する n 次の三角多項式とする

$$\|f-T_n(f)\|\leqq\|f-P_n\|+\|P_n-T_n(P_n)\|+\|T_n(f-P_n)\|$$

であるから(1)を用いると第3項は $M_1\|f-P_n\|$ をこえない. (2)を用いて，さらに補題を用いると

$$\|P_n-T_n(P_n)\|\leqq M_2\cdot n^{-\lambda}\|P_n^{((\lambda))}\|\leqq O(n^{-\lambda}\cdot n^{\lambda-\alpha})=O(n^{-\alpha})$$

となる. よって証明できた.

大ざっぱにいえば，飽和近似の次数が $O(n^{-\lambda})$ のような近似法は $0<\alpha<\lambda$ の Lipschitz-α クラスに対して最良近似と同じ次数の近似度を持つというのである．特に前節の $R_n(t)$ をとると Lipschitz クラスに対しては $O(n^{-\lambda})$ の次数迄は最良近似の多項式の代用ができることが分る．

文献

[1] J. Favard, Analyse harmonique, Coll. Internat. Centre Nat. Rech. Sci., Paris (1949).

[2] H. Zamansky, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 66 (1949), 19-93. 同誌 67 (1950), 161-198.

[3] G. Alexits, Acta Math. Acad. Sci. Hungarica, 3 (1952), 29-30.

[4] P. L. Butzer, Math. Annalen, 133 (1957), 410-425.

[5] 洲之内・渡利，学士院紀事 34 (1958), 477-481. 東北数学雑誌 11 (1959), 112-118.

[6] 洲之内，Oberwolfach における近似理論シンポジューム記録集 (1964, Basel).

[7] A. H. Turetskii, Izvestja Akad. Nauk USSR 25 (1961), 411-442.